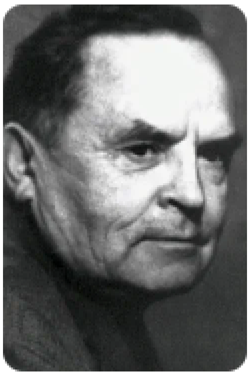
Сегодня у нас будут вопросы про Власова:

Анатолий Александрович Власов

Советский и российский физик-теоретик, специалист по физике плазмы и статистической физике. Лауреат Ленинской премии. Википедия



Родился: 7 августа 1908 г., Балашов, Российская империя

Умер: 22 декабря 1975 г. (67 лет), Москва, РСФСР, СССР

Чем известен: один из создателей современной теории плазмы, автор кинетического уравнения плазмы

В браке с: Лия Иосифовна Керш, Александра Васильевна Власова

Дети: Наталья Анатольевна Власова, Александр Анатольевич Власов

Научный руководитель: Игорь Евгеньевич Тамм

Нам предстоят вопросы:

17. Сформулировать концепцию самосогласованного поля в системах с дальнодействием. Получить из первого уравнения цепочки Боголюбова кинетическое уравнение Власова как нулевое приближение по параметру дальнодействия в классической плазме.

18. Линеаризуя уравнение Власова для классического электронного газа в компенсирующем поле положительно заряженных тяжелых ионов, получить систему уравнений для эволюции слабонеравновесного состояния.

29. Получить дисперсионное уравнение для продольных колебаний электростатического поля и плотности в классической плазме, связывающее плазменную частоту с величиной волнового вектора. Показать, как может быть устранена обратимость во времени уравнения Власова («ε-процедура»).

Что было известно до Власова? Были известны ленгмюровские продольные колебания в плазме с ленгмюровской частотой:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$$

Вывод:

Действительно, выделяя в уравнении непрерывности (первое уравнение гидродинамики)

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0$$

первый порядок по отклонению от равновесия, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\rho_0 = mn$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, учитывая что в соответствии со вторым законом Ньютона (или уравнением Эйлера в гидродинамике)

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_1 = \rho_0 \frac{e}{m} \mathbf{E}_1,$$

продифференцировав по времени уравнение непрерывности, подставив туда $\mathbf{u}_1$ и выражение для $\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = 4\pi \rho_1 e/m$, получаем сразу

$$\ddot{\rho}_1 + \omega_0^2 \rho_1 = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}.$$

Следствие: скорость э/м волн в плазме должна быть $\frac{\omega_0}{k}$. Так оно и было, но при больших волновых числах k эта формула начинала быть неверное. За исследование взялся Власов.

С точки зрения статистических функций распределения, если представить парную корреляционную функцию F_2 в виде

$$F_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') = F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot F_1(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}') + G_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}'),$$

то концепция главенствующего значения самосогласованного поля будет означать, что вклады в физические характеристики системы, связанные с учетом индивидуальных корреляций G_2, пренебрежимо малы по сравнению с эффектами, обусловленными главным членом $F_2 = F_1 \cdot F_1$.

Итак, ограничимся основным членом в F_2 (т. е. нулевым приближением по параметру v/r_D^3) и подставим его в первое уравнение цепочки Боголюбова (оно сразу становится замкнутым относительно функции F_1). Имеем в правой его части

$$\Phi_1(F_2) = \frac{1}{v} \int d\mathbf{r}'\, d\mathbf{p}'\, \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} F_1(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}') \frac{\partial F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \widetilde{U}(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}},$$

где величина

$$\widetilde{U}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{v} \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) F_1(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}')\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{p}'$$

имеет совершенно четкий физический смысл: так как

$$\frac{N}{V} \int F_1(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}')\, d\mathbf{p}' = n(t, \mathbf{r}')$$

представляет собой плотность числа частиц в окрестности точки $\mathbf{r}'$, то

$$\widetilde{U}(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\, n(t, \mathbf{r}') \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

является потенциалом того самосогласованного поля, которое создается всеми частицами (распределенными в пространстве в соответствии с плотностью $n(t, \mathbf{r}')$) в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t. Перенеся этот член в левую часть, получим

$$\frac{\partial F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial (U + \widetilde{U}(t, \mathbf{r}))}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Это и есть кинетическое уравнение в приближении самосогласованного поля, полученное и исследованное А. А. Власовым в 1938 г. Сделаем несколько замечаний по поводу этого важного во всей кинетической теории результата.

1. Уравнение условно. Оно, по существу, представляет лишь идею. На самом деле однокомпонентных электрически нейтральных систем заряженных частиц не бывает, должно быть как минимум два сорта ионов, а, значит, не одно, а система уравнений Власова. С этой многокомпонентностью связаны характерные эффекты, один из которых мы обсудим в задаче 35.

2. Уравнение написано относительно функции распределения F_1. Отклонения ее значений в локальных областях системы от равномерного распределения приводит к возникновению движущихся объемных зарядов, возникают поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, в связи с чем в кинетическую теорию органически включаются уравнения Максвелла (частный пример такого рода см. в задаче 32) и резко расширяется круг рассматриваемых физических задач (магнитогидродинамические эффекты в плазме).

3. Уравнение Власова в чистом виде не учитывает эффекты столкновения ионов друг с другом, поэтому называется иногда уравнением для «бесстолкновительной» плазмы. Оно обратимо во времени (замена $t \to -t$ и $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ не меняет его), но подобная ситуация в теоретической физике не является исключением: уравнения Максвелла тоже обратимы, но не исключают запаздывающих, опережающих и комбинированных решений. Так и здесь существуют различного типа решения, причем для выбора физически осмысленного решения удобно будет хотя бы чисто символически включить бесконечно слабый релаксационный механизм, нарушающий эту симметрию по времени. Мы сделаем это на примере частной задачи в п. б).

4. Уравнение Власова — это уравнение нулевого приближения. Система уравнений для F_1 и корреляционной части G_2, обеспечивающая первый порядок по параметру v/r_D^3, приведена в задаче 30. Это очень сложные уравнения. И дело не только в математических трудностях. Всякое улучшение уравнения Власова, связанное с учетом столкновений ионов, — это в физическом смысле объединение двух противоположных тенденций, дальнодействия (кулоновское взаимодействие) и близкодействия (столкновение твердых сфер), характеризующихся противоположными по отношению друг к другу «малыми» параметрами. Даже чистый кулоновский потенциал при этих улучшениях не всегда является удобной моделью, и, чтобы придать тем или иным выражениям разумное значение, его приходится модифицировать, обрезать (см. задачу 44) и т. д.

Вот мы и ответили на

17. Сформулировать концепцию самосогласованного поля в системах с дальнодействием. Получить из первого уравнения цепочки Боголюбова кинетическое уравнение Власова как нулевое приближение по параметру дальнодействия в классической плазме.

Но основным является 5-е замечание Квасникова:

5. Уравнение Власова и без поправок достаточно сложное нелинейное интегральное уравнение. Решить его в общем случае не удается. В п. б) и в) мы рассмотрим две частные задачи, укладывающиеся в схему линеаризованного уравнения и выявляющие два характерных для плазмы коллективных эффекта: плазменные колебания и свойство экранировки.

Уравнение мы записали, но решить его не можем. Поэтому сделаем ещё 100500 приближений (суммарно будет 201000 приближений) для его решения и будем двигаться к вопросам 18 и 29:

18. Линеаризуя уравнение Власова для классического электронного газа в компенсирующем поле положительно заряженных тяжелых ионов, получить систему уравнений для эволюции слабонеравновесного состояния.

29. Получить дисперсионное уравнение для продольных колебаний электростатического поля и плотности в классической плазме, связывающее плазменную частоту с величиной волнового вектора. Показать, как может быть устранена обратимость во времени уравнения Власова («ε-процедура»).

Одночастичную функцию электронного газа F_1 представим в виде

$$F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = F_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

где $F_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — равновесная функция распределения (по $\mathbf{p}$ — максвелловское, по $\mathbf{r}$ — однородное распределение).

Путём долгих занудных выкладок (см. в конце файла) получаем систему уравнений для f и $\mathbf{E}$

$$\frac{\partial f(t,\mathbf{r},\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi n e\int f(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}$$

(опущен член второго порядка $-(e\mathbf{E}/m)\cdot(\partial f/\partial \mathbf{v})$), где

$$F_0 = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{mv^2}{2\theta}\right\},\quad \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{m}{\theta}\mathbf{v}F_0.$$

Напомним еще раз о приближениях, которые привели нас к этому линейному уравнению:

1) опустили парные корреляции (бесстолкновительное приближение);
2) положили $f \ll F_0$ (слабонеравновесный случай);
3) ограничились электростатическим приближением (нерелятивистское приближение).

Как пишет Квасников, пункты 2) и 3) – фигня. А вот 1) – это плохо. Как мы с вами помним из предыдущих методичек, именно столкновения приводят к релаксации, возрастанию энтропии, убыванию H-функции и т.д. Нам нужно их как-то учесть. Власов предложил учесть их «ручками» (костыль по сути)

Сделаем это следующим самым простым образом: в правую часть уравнения для f поставим вместо нуля интеграл столкновений, как в § 3, в аппроксимации релаксационным членом с последующей операцией его выключения:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = -\varepsilon(F_1(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) - F_0) = -\varepsilon f\big|_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}.$$

Эта процедура была названа ε-процедура. Именно она нарушает симметрию времени и делает процессы необратимыми.

Вот теперь мы готовы, как от нас хотят в вопросе №29, получить дисперсионное соотношение, т.е. найти скорость волны в плазме $v(k)$ в зависимости от её волнового числа.

Выкладки на сей раз совсем ужасны и занимают 3,5 страницы. Разумеется, они в конце методички, а вот вам результат (Ω – новая собственная частота, отличающаяся от ленгмюровской):

$$\Omega \cong \omega_0\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\theta}{m}\cdot\frac{k^2}{\omega_0^2} + \ldots\right).$$

Таким образом, в нулевом приближении по k^2 частота собственных колебаний плазмы совпадает с ленгмюровской частотой $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$, к которой с ростом k прибавляется слабый квадратичный член (А. А. Власов, 1938).

График:

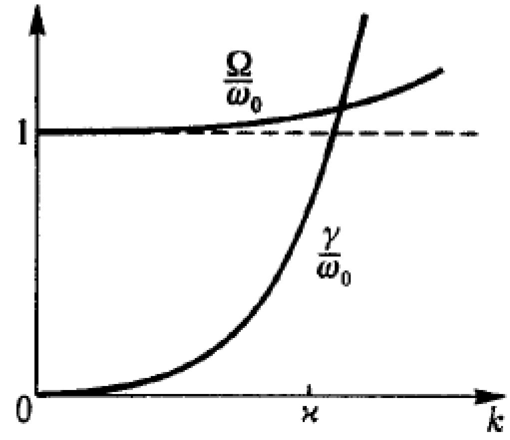


Рис. 195. График зависимостей от величины волнового вектора k собственной частоты Ω/ω_0 и затухания γ/ω_0 плазменных колебаний

Молодец Власов, установил поведение плазмы при прохождении э/м волны! Ну и фазовая скорость тогда рассчитается по формуле $v(k) = \frac{\Omega}{k}$. При $k \to \infty$ она расходится – это нормально, т.к. формула $\Omega \cong \omega_0 \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\theta}{m} \cdot \frac{k^2}{\omega_0^2} + \dots \right)$ была получена в длинноволновом приближении, т.е. для малых k (см. выкладок).

Выкладки:

К вопросу №18:

Чтобы сохранить однокомпонентную структуру уравнения Власова, используем следующую модель: положительные ионы (очень тяжелые и малоподвижные по сравнению с электронами) будем считать не только неподвижными и равномерно распределенными, но и равномерно размазанными (модель «желе»), и на фоне этого положительного заряда двигаются электроны, газ которых будет считаться невырожденным. Одночастичную функцию электронного газа F_1 представим в виде

$$F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = F_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

где $F_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — равновесная функция распределения (по $\mathbf{p}$ — максвелловское, по $\mathbf{r}$ — однородное распределение). Плотность положительного заряда фона можно формально выразить через эту функцию

$$\rho^{(+)} = -\rho_0^{(-)} = en \int F_0 \, d\mathbf{p} = en.$$

Поэтому величина электростатического потенциала поля, создаваемого положительным фоном в точке $\mathbf{r}$, будет равна

$$U(\mathbf{r}) = n \int \frac{-e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} F_0(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \, d\mathbf{p}' \, d\mathbf{r}',$$

самосогласованный же потенциал, создаваемый в этой точке другими электронами, имеет вид

$$\widetilde{U}(t, \mathbf{r}) = n \int \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} F_1(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}') \, d\mathbf{p}' \, d\mathbf{r}'.$$

Вводя напряженность действующего на электрон (заряд $q_{эл} = -e$) электростатического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ (вектор индукции), можем написать

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(U + \widetilde{U}) = (-e)\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n \int \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\bigl(F_1(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}') - F_0(\mathbf{r}', \mathbf{p}')\bigr)\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{p}'.$$

Сократим на $-e$, учтем $F_1 - F_0 = f$, подействуем слева и справа операцией div, учтем, что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}$$

и что (хорошо знакомая задача о потенциале точечного единичного заряда)

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

получаем для $\mathbf{E}$ не что иное, как одно из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\, \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -4\pi e n \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p}.$$

Предположим теперь, что система слабонеравновесна и для любого t и $\mathbf{r}$

$$\frac{f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{F_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \ll 1.$$

Тогда, производя линеаризацию уравнения Власова, сохраняя для градиента суммарного потенциала введенное выше обозначение (заметим, что $\mathbf{E}$ и f одинакового порядка малости) и переходя к переменной $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ (мы, как и везде в подобных случаях, не будем вводить нового обозначения для функций от скоростей, полагая $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = m^3 f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, $F_0(\mathbf{v}) = m^3 F_0(\mathbf{p})$ и т. д.), получаем систему уравнений для f и $\mathbf{E}$

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi n e \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}$$

(опущен член второго порядка $-(e\mathbf{E}/m) \cdot (\partial f/\partial \mathbf{v})$), где

$$F_0 = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2\theta}\right\}, \quad \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{m}{\theta}\, \mathbf{v} F_0.$$

Выкладки к №29:

Исследуем теперь с помощью линеаризованного уравнения Власова проблему собственных колебаний рассматриваемой системы в целом. Считая внешнее поле отсутствующим, получаем, как и должно быть в задачах этого типа, линейную систему однородных уравнений. Можно перейти к трехмерному представлению Фурье, но проще искать решение этих уравнений не в виде суперпозиции, а в виде отдельной изолированной волны (уравнения-то линейные, и обшность рассмотрения при этом не теряется) продольного типа (поперечные колебания будут рассмотрены в задаче 35), распространяющейся, например, вдоль оси x:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_{k\omega}(\mathbf{v}) e^{-i\omega t + ikx}, \quad E_x(t, \mathbf{r}) = E_{k\omega} e^{-i\omega t + ikx}, \quad E_y = E_z = 0.$$

Тогда получим, сокращая на экспоненту, уравнения для амплитуд

$$-i\omega f_{k\omega} + iv_x k f_{k\omega} - \frac{e}{m} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial v_x} E_{k\omega} = -\varepsilon f_{k\omega}\big|_{\varepsilon \to 0},$$

$$ikE_{k\omega} = -4\pi en \int f_{k\omega}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}.$$

Выражая $f_{k\omega}$ из первого уравнения,

$$f_{k\omega} = i \frac{(e/m) \cdot (\partial F_0/\partial v_x)}{\omega + i\varepsilon - v_x k} \cdot E_{k\omega},$$

и подставляя эту амплитуду во второе, получаем

$$ikE_{k\omega} = -4\pi e \cdot i \cdot \frac{en}{m} E_{k\omega} \int \frac{\partial F_0/\partial v_x}{\omega - v_x k + i\varepsilon}\, d\mathbf{v}.$$

При постановке проблемы на собственные колебания мы интересуемся всегда условием существования у исследуемых уравнений нетривиального решения (тривиальное решение $f_{k\omega} = E_{k\omega} = 0$, соответствующее невозбужденной системе, существует всегда), когда $E_{k\omega} \neq 0$. Сокращая левую и правую части последнего уравнения на $E_{k\omega}$, мы получим условие существования такого нетривиального решения, являющееся, по существу, уравнением для собственной частоты $\omega = \omega(k)$ как функции волнового вектора k (это соотношение называют часто дисперсионным уравнением). Учитывая, что функция F_0 является произведением трех одномерных нормированных максвелловских распределений, из которых после интегрирования по v_y и v_z остается только одно:

$$w(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2\theta}\right\},$$

беря производную по v_x и обозначая $4\pi e^2 n/m = \omega_0^2$, получим дисперсионное уравнение для $\omega = \omega(k)$ в виде

$$1 - \frac{\omega_0^2}{k} \cdot \frac{m}{\theta} \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv_x \, \frac{v_x}{\omega - v_x k + i\varepsilon} \exp\left\{ -\frac{m v_x^2}{2\theta} \right\} = 0.$$

Обратим внимание, что особенность подынтегральной функции (полюс в точке $v_x = \omega/k + i\varepsilon/k$) смещена в верхнюю полуплоскость $\widetilde{v}_x$ на бесконечно малую величину (рис. 193), что позволяет сразу использовать для подынтегрального выражения известную символическую формулу

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{P}{x} \mp i\pi\,\delta(x),$$

где P — операция последующего взятия интеграла в смысле главного значения. Напомним, что это такое. Рассмотрим интеграл от той же функции по пути, изображенному на рис. 194 (он эквивалентен нашему), и разобьем этот путь (и соответственно интеграл) на два: по действительной оси v_x с бесконечно малым перерывом около точки $v_x = \omega/k$ (так называемый интеграл в смысле главного значения) и по бесконечно малой полуокружности, замыкающей этот перерыв. Так как интеграл по полуокружности, проходимой против часовой стрелки, равен половине вычета подынтегральной функции в точке $v_x = \omega/k$, умноженного как всегда на $2\pi i$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v_x) \frac{1}{v_x - (\omega/k) - (i\varepsilon/k)} \, dv_x = \fint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(v_x)}{v_x - (\omega/k)} \, dv_x + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \, \Phi\left(\frac{\omega}{k} \right).$$

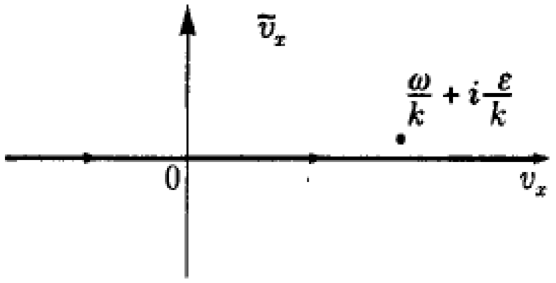


Рис. 193. Расположение полюса подынтегральной функции дисперсионного уравнения

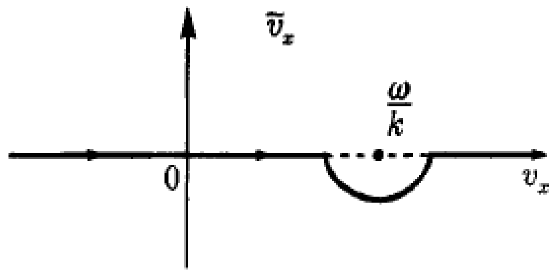


Рис. 194. Пояснение к процедуре выделения интеграла в смысле главного значения

Подставляя сюда в нашем случае функцию

$$\Phi(v_x) = -\frac{v_x}{k}\exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2\theta}\right\},$$

получаем для дисперсионного уравнения

$$1 - J(k,\omega) + iI(k,\omega) = 0,$$

где

$$J(k,\omega) = \frac{\omega_0^2}{k}\cdot\frac{m}{\theta}\sqrt{\frac{m}{2\pi\theta}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv_x\,\frac{v_x}{\omega - v_x k}\exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2\theta}\right\},$$

$$I(k,\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\omega_0^2\omega m^{3/2}}{k^3\theta^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{m\omega^2}{2k^2\theta}\right\}.$$

К сожалению, интеграл $J(k,\omega)$ не берется. Поэтому ограничимся рассмотрением частного (но важного) случая малых k (т. е. длинных волн, так как $k = 2\pi/\lambda$). Представим подынтегральную функцию (без максвелловской экспоненты) в виде

$$\frac{v_x}{\omega}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{v_x}{\omega}k} = \frac{v_x}{\omega} + \frac{v_x^2}{\omega^2}\cdot k\,\frac{1}{1-\dfrac{v_x}{\omega}k} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{v_x}{\omega} + \frac{v_x^2}{\omega^2}k + \frac{v_x^3}{\omega^3}k^2 + \frac{v_x^4}{\omega^4}k^3 + \frac{v_x^5}{\omega^5}k^4 + \frac{v_x^6}{\omega^6}k^5\frac{1}{1-\dfrac{v_x}{\omega}k}.$$

Это не разложение в ряд Тейлора, а точная формула, с помощью которой мы получим для $J(k,\omega)$ лишь первые члены асимптотического разложения по k (целиком интеграл $J(k,\omega)$ в виде бесконечного степенного ряда по k не выражается — довольно распространенная в задачах статистической физики ситуация). Это «разложение» надо усреднить по максвелловскому распределению. Имеем

$$\overline{v_x} = \overline{v_x^3} = \overline{v_x^5} = 0, \quad \overline{v_x^2} = \frac{\theta}{m}, \quad \overline{v_x^4} = \frac{\theta}{m}\cdot 3\,\frac{\theta}{m},$$

и уравнение для $\omega(k)$ приобретает вид

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cdot\left[1 + \frac{3\theta}{m\omega^2}k^2 + \frac{m}{\theta\omega^4}k^4\overline{\left(\frac{v_x^6}{1-(k/\omega)\,v_x}\right)}\right] + iI(k,\omega) = 0.$$

В длинноволновом приближении, когда $k^2 \ll m\omega^2/\theta$, можно сохранить в круглых скобках второго слагаемого только первые два (или даже только первое) слагаемые, опустив поправки порядка k^4 и выше, включая и непредставимые в виде разложения по степеням k^2. Уравнение становится уже приближенным.

Приступая к решению этого трансцендентного уравнения относительно $\omega(k)$, сразу замечаем, что в силу $I(k,\omega) \neq 0$ оно не имеет действительных решений. Подобная ситуация встречается довольно часто в теории колебаний и в квантовой механике и послужила основой для введения представления о квазистационарных уровнях. Полагая $\omega = \Omega - i\gamma$ (при этом колебания $e^{+i\omega t}$ приобретают характер уже затухающих, $e^{-i\Omega t - \gamma t}$), попробуем найти решения для частоты колебаний Ω и их затухания γ в случае $\gamma/\Omega \ll 1$, когда в системе действительно реализуется колебательный процесс. С формальной точки зрения введение частоты $\omega = \Omega - i\gamma$ означает ее аналитическое продолжение на комплексную плоскость $\widetilde{\omega}$, но при этом необходимо сохранить выбранный нами выше способ обхода полюса $\widetilde{v}_x = \omega/k$ снизу, сохраняя тем самым и выбор типа дисперсионного уравнения.

Откладывая более подробный анализ этого уравнения до задачи 38, найдем его корень $\omega = \Omega - i\gamma$, соответствующий случаю $\gamma \ll \Omega$, положим

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{(\Omega - i\gamma)^2} \cong \frac{1}{\Omega^2} + i\,\frac{1}{\Omega^2}\cdot 2\,\frac{\gamma}{\Omega}$$

и сохраним только главные члены в действительной и мнимой частях уравнения (при этом $I(k, \Omega - i\gamma) \cong I(k,\Omega)$):

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\left(1 + \frac{3\theta}{m\Omega^2}\,k^2 + \ldots\right) - i\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\cdot\frac{2\gamma}{\Omega}(1+\ldots) + iI(k,\Omega) + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю действительную часть, имеем

$$\Omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3\theta}{m\Omega^2}\,k^2 + \ldots\right),$$

откуда, извлекая из обеих частей квадратный корень и произведя итерацию по решению в нулевом приближении $\Omega\big|_{k=0} = \omega_0$, получаем в первом приближении

$$\Omega \cong \omega_0\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\theta}{m}\cdot\frac{k^2}{\omega_0^2} + \ldots\right).$$